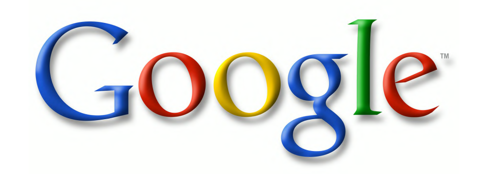
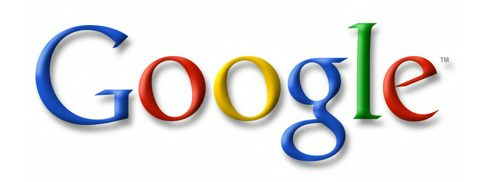





Math 5158.31
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1630
CHRISTO ET ECCLESIAE
From the
Library Fund
Subscribed in 1842
Recd Sept. 12,
1843

MÉMOIRE

DE GÉOMÉTRIE

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES CONIQUES SPHÉRIQUES.

MÉMOIRE

DE GÉOMÉTRIE

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES

CONIQUES SPHÉRIQUES;

PAR A. CHASLES.



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE DE BRUXELLES.

1831.

MÉMOIRE

DE GÉOMÉTRIE

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES CONIQUES SPHÉRIQUES [1].

§ Ier.

Préliminaires.

[1] Soit un cône du second degré ayant son sommet au centre d'une sphère. La courbe d'intersection de ces deux surfaces est, comme on sait, une *ligne de courbure* du cône, parce qu'elle est partout normale à ses deux arêtes, qui sont aussi des lignes de courbure.

Cette ligne est l'ensemble de deux courbes fermées, provenant de la pénétration de la sphère par les deux nappes du cône. Ces deux courbes sont évidemment symétriques par rapport aux trois plans principaux du cône, de même que le cône lui-même est symétrique par rapport à chacun

---

(1) Cet écrit fait suite à un *Mémoire sur les Propriétés Générales des Cônes du Second Degré*, dont l'Académie a ordonné l'insertion dans le Recueil de ses Mémoires, et dont la lecture est indispensable pour l'intelligence de celui-ci.

Les deux lignes *focales* du cône perceront l'hémisphère sur lequel se trouve l'ellipse sphérique que nous considérons, en deux points que l'on peut appeler les *foyers* de l'ellipse, à cause de la ressemblance qui a lieu entre leurs propriétés que nous allons démontrer, et celles des foyers des ellipses planes.

Enfin les deux plans *cycliques* du cône couperont le même hémisphère suivant deux demi-grands cercles qui auront pour diamètre commun le grand axe du cône; ce grand axe est compris dans le plan du grand arc-diamètre de l'ellipse; et ces deux demi-grands cercles sont perpendiculaires au plus petit arc-diamètre et ne rencontrent jamais l'ellipse. Appelons ces deux arcs, pour indiquer leur origine, *arcs cycliques* de l'ellipse sphérique.

[3] Maintenant soit mené le plan de la petite section du cône. Il est clair que ce plan partagera en deux parties égales, et placées symétriquement par rapport à ce plan, l'intersection complète du cône et de la sphère.

Considérons la partie de cette intersection comprise d'un même côté de ce plan. Elle sera composée de deux branches qui seront des moitiés des deux ellipses sphériques. Ces deux branches, symétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'axe principal du cône, et qui s'éloignent de ce plan à partir de leurs sommets, forment une courbe qu'on peut appeler *hyperbole sphérique*. Son *centre* est le point où le grand axe du cône perce l'hémisphère sur lequel est la courbe; ses deux *foyers* sont les points où les deux li-

gnes focales du cône percent cet hémisphère; ces foyers se trouvent sur l'arc de grand cercle qui joint les deux seuls sommets de la courbe.

Enfin les deux plans cycliques du cône coupent l'hémisphère suivant deux demi-grands cercles qui passent par le centre de l'hyperbole, et font des angles égaux avec l'arc qui joint ses deux foyers; ce sont les deux *arcs cycliques* de l'hyperbole.

[4] Considérons enfin l'hémisphère situé d'un côté du plan de la grande section du cône, lequel plan comprend les deux lignes focales.

On aura sur cet hémisphère deux moitiés des deux ellipses sphériques; ces deux courbes se présentent leur concavité et se rapprochent du plan principal du cône à partir de leurs sommets.

L'ensemble de ces deux branches forme une troisième espèce de courbe sphérique. Cette courbe a un centre qui est le point d'intersection de la sphère par le petit axe principal du cône; quatre foyers qui sont dans le plan de la grande section du cône, et deux *arcs cycliques* qui sont situés entre les deux branches de la courbe, et perpendiculaires à l'arc de grand cercle qui joint ses deux sommets.

Les trois courbes que nous venons de considérer sont des portions d'une même courbe, qui est l'intersection complète de la sphère par un cône du second degré, ayant son sommet au centre de la sphère. On peut donc les désigner par le nom commun de *conique sphérique.*

[5] Les *coniques sphériques* jouissent d'un grand nombre de propriétés, dont la plupart sont très-remarquables.

On conçoit que *toutes ces propriétés sont doubles*, c'est-à-dire qu'à chaque proposition relative aux coniques sphériques, correspond toujours une seconde proposition relative à ces mêmes courbes.

Cela résulte de ce que les propriétés des cônes du second degré sont doubles, ainsi que nous l'avons démontré (Mémoire cité).

Mais on démontre aussi ce principe général, en remarquant qu'à une figure quelconque tracée sur la sphère, correspond toujours une seconde figure, qui est l'enveloppe des arcs de grands cercles, dont les plans sont perpendiculaires aux rayons de la sphère, menés aux différens points de la première figure; à une propriété de la première figure, répond donc toujours une propriété de la seconde figure; mais, si la première figure est une *conique*, la seconde sera aussi une *conique* provenant de l'intersection de la sphère par le cône *supplémentaire* de celui sur lequel se trouve la première conique; ce qui démontre le principe énoncé.

On pourrait dire que les deux coniques sont *supplémentaires*, de même que les deux cônes; les arcs cycliques de l'une sont dans les plans diamétraux perpendiculaires aux diamètres de la sphère menés par les foyers de l'autre.

[6] Parmi les nombreuses propriétés des coniques sphériques, il en est deux qui ont déjà été données par M.

Magnus, de Berlin (voyez *Annales de Mathématiques*, août 1825); ce sont ces deux-ci :

« La somme ou la différence des deux rayons vecteurs » menés des deux foyers d'une conique sphérique à un » quelconque de ses points, est constante;

» Les deux rayons vecteurs menés à un point de la co- » nique font des angles égaux avec l'arc de grand cercle » tangent à la courbe en ce point. »

[7] On voit sur-le-champ que, par la considération de la conique supplémentaire dont nous venons de démontrer les propriétés, on aurait pu conclure immédiatement de ces deux propositions les suivantes, qui nous paraissent offrir le même degré d'intérêt :

« Dans toute conique sphérique il existe deux arcs de » grands cercles tels que la somme ou la différence des an- » gles que chaque arc de grand cercle tangent à la conique » fait avec eux est constante;

» Chaque arc de grand cercle tangent à la conique, et » compris entre ces deux arcs fixes, est divisé en son mi- » lieu par son point de contact avec la conique. »

La première de ces deux propositions fait voir que :

« L'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques, » qui ont l'angle au sommet commun et même surface, est » une conique sphérique. »

[8] Ce dernier énoncé et la proposition précédente offrent une analogie parfaite avec ces deux propriétés connues de l'hyperbole, savoir :

« L'enveloppe des bases de tous les triangles qui ont
» l'angle au sommet commun et même surface est une hy-
» perbole.

» Toute tangente à l'hyperbole a sa partie comprise entre
» les deux asymptotes divisée en son milieu par son point
» de contact avec la courbe. »

Nous trouverons la même analogie entre plusieurs autres propriétés des coniques sphériques et celles de l'hyperbole; de sorte que les arcs cycliques des coniques sphériques jouent le même rôle que les asymptotes de l'hyperbole.

Quant aux deux théorèmes de M. Magnus, leur ressemblance avec les propriétés connues des foyers des coniques planes est frappante; il en est de même de toutes les autres propriétés des foyers de ces courbes.

Nous faisons voir en effet, dans le dernier paragraphe de ce Mémoire, comment les propriétés des foyers des coniques planes, et celles des asymptotes de l'hyperbole, peuvent être considérées comme des conséquences de celles que nous démontrons sur les foyers et sur les arcs cycliques des coniques sphériques.

Mais, ces propriétés des foyers des coniques sphériques s'appliquant à toutes les coniques planes, il est naturel de penser que celles des arcs cycliques doivent pareillement avoir leurs analogues dans toute conique plane; elles mettent donc sur la voie d'un genre nouveau de propriétés générales des coniques planes, dont celles des asymptotes de l'hyperbole ne sont que des cas particuliers.

Nous ferons de ces propriétés nouvelles des coniques planes l'objet d'un écrit particulier, parce que nous y joindrons les propriétés analogues des surfaces du second degré.

[9] On peut s'étonner que l'élégance des deux propositions de M. Magnus n'ait pas encore porté l'attention des géomètres sur ce genre de recherches, et que la théorie des coniques sphériques, susceptible peut-être de plus d'extension que celle des coniques planes, à cause de la *dualité* de toutes les propositions de géométrie sphérique, soit encore à créer.

Nous n'avons certes pas la prétention de présenter une théorie de ces coniques; mais nous nous proposons seulement de faire connaître un certain nombre de celles de leurs propriétés qui se rattachent aux *foyers* et aux arcs *cycliques*, et qui résultent immédiatement de celles que nous avons démontrées sur les cônes du second degré. Il est clair que diverses autres propriétés connues des cônes du second degré donneraient semblablement, et sans difficulté, des propriétés des coniques sphériques, qui devraient trouver place dans un traité de ces courbes.

[10] Une ellipse sphérique et une hyperbole sphérique n'ont chacune que deux foyers; mais une conique sphérique complète a quatre foyers, situés aux extrémités de deux diamètres de la sphère. Dans les théorèmes relatifs à deux foyers, il sera toujours question de deux foyers pris sur ces deux diamètres respectivement, et non de deux foyers pris sur le même diamètre. Cela résulte de ce que les deux foyers devront ap-

partenir aux deux lignes focales du cône sur lequel est la conique.

Mais il est plus simple de supposer, dans tout ce qui va suivre, que la conique est une seule ellipse, ou une seule hyperbole sphérique, et de ne considérer sur la sphère que l'hémisphère sur lequel est cette ellipse, ou cette hyperbole; par-là nous éviterons toute ambiguité; un arc de grand cercle tangent à la courbe n'aura avec elle qu'un point de contact, tandis qu'il la toucherait en deux points, si on considérait une conique complète; deux arcs de grands cercles quelconques ne se couperont qu'en un point, puisqu'on ne considère qu'une moitié de la sphère; par la même raison trois arcs de grands cercles ne se couperont deux à deux qu'en trois points, et ne formeront qu'un triangle sphérique.

Comme il ne va être question que d'arcs de grands cercles, nous pouvons, pour plus de brièveté dans le langage, employer simplement le mot *arc;* et il sera bien entendu que nous ne parlons que d'arcs de grands cercles.

Nous appellerons *angle sphérique* l'angle formé par deux arcs de grands cercles; leur point d'intersection sera le *sommet* de l'angle.

Nous appellerons *arc vecteur* tout arc de grand cercle mené par un foyer de la conique.

Les propriétés des coniques sphériques que nous allons exposer étant toutes des conséquences immédiates de celles des cônes du second degré que nous avons démontrées dans

le Mémoire cité, il nous suffira de les énoncer en indiquant, pour chacune d'elles, la propriété correspondante des cônes du second degré [1].

§ II.

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX DEUX ARCS CYCLIQUES D'UNE CONIQUE SPHÉRIQUE ; ET PROPRIÉTÉS RELATIVES A SES DEUX FOYERS.

[11] Les deux théorèmes (20 *a*) donnent ceux-ci :

Tout arc de grand cercle tangent à une conique sphérique, coupe les deux arcs cycliques en deux points qui sont également éloignés du point de contact de cet arc tangent.

Les arcs vecteurs menés des deux foyers d'une conique sphérique à un point de cette courbe, sont également inclinés sur l'arc de grand cercle tangent en ce point à la conique.

[12] Réciproquement :

Si une courbe tracée sur une sphère est telle que tout arc de grand cercle tangent à cette courbe, et compris entre deux arcs de grands cercles fixes, soit divisé en son milieu au point où il touche la courbe, cette courbe est une conique sphérique.

Si une courbe tracée sur une sphère est telle que les arcs de grands cercles menés de deux points fixes à un point quelconque de la courbe, soient également inclinés sur l'arc de grand cercle tangent à la courbe en ce point, cette courbe est une conique sphérique.

Cela résulte des deux théorèmes (21 *a*).

[13] Les deux théorèmes (22 *a*) donnent les suivans,

(1) Cette indication se fera par des numéros de renvoi auxquels nous ajouterons la lettre *a*, pour les distinguer des numéros de ce Mémoire.

dont les deux (11) ne sont que des cas particuliers :

Tout arc de grand cercle coupe une conique sphérique en deux points qui sont également éloignés des points où cet arc coupe les deux arcs cycliques respectivement.

Les deux arcs vecteurs menés des deux foyers d'une conique sphérique au point d'intersection de deux arcs tangens à cette courbe, font respectivement avec ces arcs tangens des angles égaux.

[14] Les théorèmes (23 *a*) donnent ceux-ci :

Les plans de deux arcs tangens à une conique sphérique, coupent les plans des deux arcs cycliques suivant quatre droites qui sont les arêtes d'un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan du grand cercle mené par les deux points de contact des arcs tangens.

Les plans de quatre arcs vecteurs menés des deux foyers d'une conique sphérique à deux points de la courbe sont tangens à un même cône de révolution dont l'axe est l'intersection des plans des deux arcs tangens à la conique en ces deux points.

[15] Les théorèmes (24 *a*) donnent ceux-ci :

La somme ou la différence des angles que chaque arc tangent à une conique sphérique fait avec les deux arcs cycliques est constante.

La somme ou la différence des arcs vecteurs menés des deux foyers d'une conique sphérique à un point quelconque de la coube est constante.

[16] Les théorèmes (25 *a*) donnent les suivans :

Tout arc de grand cercle tangent à une conique sphérique coupe les deux arcs cycliques en deux points, tels que le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs compris entre ces points et le point d'intersection des deux arcs cycliques est constant.

Les arcs vecteurs menés des deux foyers d'une conique sphérique à un point quelconque de la courbe, font avec l'arc diamètre qui joint les deux foyers deux angles, tels que le produit des tangentes trigonométriques de leurs moitiés est constant.

[17] Les théorèmes (26 *a*) donnent ceux-ci :

Dans toute conique sphérique le produit des sinus des arcs de grands cercles menés d'un point de la courbe perpendiculairement aux deux arcs cycliques est constant.

Dans toute conique sphérique le produit des sinus des arcs de grands cercles menés des deux foyers perpendiculairement à chaque arc tangent à la courbe est constant.

[18] Les deux théorèmes (28 *a*, 2e et 1re colonnes) donnent respectivement les deux suivans :

Si, ayant une conique sphérique et ses deux arcs cycliques, on fait mouvoir sur la sphère un arc de grand cercle de 100°, de manière qu'une de ses extrémités glisse sur l'un ou l'autre des deux arcs cycliques, pendant que l'autre extrémité se meut sur la conique, cet arc enveloppera une seconde conique sphérique qui aura un double contact avec la proposée, et dont les foyers seront les extrémités des rayons de la sphère perpendiculaires aux plans des arcs cycliques de la conique proposée.

Si, des foyers d'une conique sphérique, on abaisse des arcs perpendiculaires sur les arcs tangens à la courbe, leurs points de rencontre avec ces arcs tangens, respectivement, seront sur une seconde conique sphérique qui aura un double contact avec la proposée, et dont les arcs cycliques seront dans les plans perpendiculaires aux rayons de la sphère qui passent par les deux foyers de la conique proposée.

[19] Les deux théorèmes (31 *a*, 2e et 1re colonnes) donnent respectivement les suivans :

Si, ayant une conique sphérique et un de ses arcs cycliques, on inscrit entre cet arc et la courbe deux arcs de 100°, et que par leur point d'intersection on mène un autre arc, aussi de 100°, terminé à l'arc qui joint les deux

Si, d'un foyer d'une conique sphérique, on abaisse deux arcs perpendiculaires sur deux arcs tangens à la courbe, qu'on joigne par un arc les pieds des deux arcs perpendiculaires, l'arc mené perpendiculairement à ce dernier par

extrémités des deux premiers situées sur la conique, cette extrémité du troisième arc appartiendra au second arc cyclique de la conique.

le point de rencontre des deux arcs tangens à la conique passera par le second foyer de la courbe.

[20] Les théorèmes (32 *a*) donnent ceux-ci :

Si deux coniques sphériques ont les mêmes arcs cycliques, et qu'on leur mène un arc tangent à toutes deux, la partie de cet arc comprise entre les deux points de contact sera de 100°.

Si deux coniques sphériques qui ont mêmes foyers se coupent, elles seront à angle droit en chacun de leurs points d'intersection.

§ III.

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES SPHÉRIQUES RELATIVES A UN SEUL ARC CYCLIQUE ; ET PROPRIÉTÉS RELATIVES A UN SEUL FOYER.

[21] Si, par un point quelconque de la sphère, on mène deux arcs de grands cercles tangens à une conique sphérique, l'arc de grand cercle qui joindra les deux points de contact pourra être appelé *l'arc polaire* du point par rapport à la conique; et, réciproquement, ce point sera dit le *pôle* de son arc polaire.

Il résulte évidemment des propriétés des droites et plans polaires des cônes du second degré, exposées (1 *a*), que :

Les arcs polaires de tous les points d'un arc de grand cercle quelconque, par rapport à une conique sphérique, passent tous par un même point qui est le pôle de cet arc; et réciproquement :

Les pôles de tous les arcs de grands cercles menés par un même point, pris par rapport à une conique sphérique, sont tous sur un même arc de grand cercle qui est l'arc polaire du point fixe.

Appelons arcs *directeurs* d'une conique les arcs polaires de ses foyers.

[22] D'après cela, les deux théorèmes (34 *a*) donnent ceux-ci :

Dans toute conique sphérique le sinus de l'angle que chaque arc tangent à la courbe fait avec un arc cyclique, est au sinus de la distance de cet arc tangent au pôle du plan cyclique dans un rapport constant.

Dans toute conique sphérique le rapport des sinus des arcs qui mesurent les distances de chaque point de la courbe à un foyer et à l'arc directeur correspondant, est constant.

[23] Les théorèmes (36 *a*) donnent ceux-ci :

Tout arc tangent à une conique sphérique, et l'arc mené par son point de contact et par le pôle d'un arc cyclique de la conique, rencontrent cet arc cyclique en deux points distans de 100°.

Les deux arcs vecteurs menés d'un foyer d'une conique sphérique à un point de la courbe et au point où son arc tangent en ce premier point rencontre l'arc directeur, sont toujours à angle droit.

[24] Les théorèmes (37 *a*) donnent les suivans :

Deux arcs tangens à une conique sphérique, et l'arc qui joint leurs points de contact avec la courbe, rencontrent un arc cyclique en trois points, dont le troisième est également éloigné des deux premiers.

Les arcs vecteurs menés d'un foyer d'une conique à deux points de la courbe sont également inclinés sur l'arc vecteur mené au point d'intersection des deux arcs tangens à la conique en ces deux points.

[25] Les théorèmes (38 *a*) donnent ceux-ci :

Deux arcs tangens à une conique sphérique et l'arc mené par leur point d'intersection et par le pôle d'un arc cyclique rencontrent cet arc en trois points dont le troisième est également éloigné des deux premiers.

Les arcs vecteurs menés d'un foyer d'une conique sphérique à deux points de la courbe, sont également inclinés sur l'arc vecteur mené au point où l'arc qui joint les deux points de la courbe rencontre l'arc directeur.

[26] Les théorèmes (39 *a*) donnent ces deux-ci :

L'arc mené par le pôle d'un arc cyclique d'une conique sphérique et par le point d'intersection de deux arcs tangens à cette courbe, et l'arc mené par les deux points de contact de ces arcs tangens, rencontrent le plan cyclique en deux points distans de 100° ;

Les points où l'arc qui joint les deux points de contact rencontre l'arc cyclique et l'arc qui joint son pôle au point de rencontre des deux arcs tangens, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points de contact.

Les deux arcs vecteurs menés d'un foyer d'une conique sphérique au point d'intersection de deux arcs tangens à la courbe et au point où l'arc mené par les deux points de contact rencontre l'arc directeur sont à angle droit ;

Les deux arcs menés par le point de rencontre des deux arcs tangens et passant, le premier par le foyer de la conique et le second par le point où l'arc qui joint les deux points de contact rencontre l'arc directeur sont conjugués harmoniques par rapport aux deux arcs tangens.

[27] Les deux théorèmes (40 *a*) donnent ceux-ci :

Si, par un point pris sur un arc cyclique d'une conique sphérique, on mène deux arcs tangens à la conique, l'arc qui joindra les deux points de contact rencontrera l'arc cyclique en un point distant du premier de 100°.

Si, par un foyer d'une conique sphérique, on mène un arc transversal, son pôle, par rapport à la conique, sera sur l'arc directeur, et l'arc mené du foyer à ce pôle sera perpendiculaire sur l'arc transversal.

[28] Les théorèmes (41 *a*) donnent ceux-ci :

Quand un quadrilatère sphérique est inscrit dans une conique sphérique, l'arc compris sur un arc cyclique de la conique entre deux côtés consécutifs du quadrilatère est supplément de l'arc compris entre les deux autres côtés.

Quand un quadrilatère sphérique est circonscrit à une conique sphérique, l'angle des deux arcs vecteurs, menés d'un foyer à deux sommets consécutifs du quadrilatère est supplément de l'angle des deux arcs vecteurs menés aux deux autres sommets.

[29] Les théorèmes (42 *a*) donnent ceux-ci :

Si, par deux points fixes d'une conique sphérique, on mène deux arcs qui se coupent en un troisième point quelconque de la courbe, le segment qu'ils intercepteront sur un arc cyclique sera de grandeur constante;

Ce segment sera de 100°, si l'arc qui joint les deux points fixes passe par le pôle de l'arc cyclique.

Étant menés deux arcs fixes tangens à une conique sphérique, et un troisième arc tangent quelconque, qui coupera les deux premiers en deux points, les arcs vecteurs, menés d'un foyer de la conique à ces deux points, feront entre eux un angle de grandeur constante.

Cet angle sera droit, si le point d'intersection des deux arcs tangens fixes est sur l'arc directeur correspondant au foyer.

[30] Les deux théorèmes (43 *a*) donnent les suivans :

Si, par les deux sommets, extrémités du petit arc-diamètre d'une ellipse sphérique, on mène deux arcs qui se coupent en un point quelconque de la courbe, le segment compris entre ces deux arcs sur un arc cyclique sera de 100°.

Tout arc tangent à une conique sphérique coupe les deux arcs tangens à cette courbe en ses deux sommets, extrémités de son grand arc-diamètre, en deux points tels que les deux arcs vecteurs, menés d'un foyer à ces deux points sont à angle droit.

[31] Les théorèmes (44 *a*) donnent les suivans :

Si, sur un arc cyclique d'une conique sphérique, on prend arbitrairement un segment de grandeur donnée, et que, par une de ses extrémités et un point fixe de la courbe, on mène un arc qui rencontrera la courbe en un second point, l'arc mené par ce second point et par la seconde extrémité du segment passera par un point fixe de de la conique.

Si, autour d'un foyer d'une conique sphérique, comme sommet, on fait tourner un angle sphérique de grandeur constante, et que, par le point où l'un de ses côtés rencontre un arc fixe tangent à la courbe, on mène un second arc tangent à la courbe, cet arc rencontrera le second côté de l'angle en un point qui aura pour lieu géométrique un arc tangent à la conique.

[32] Les théorèmes (45 *a*) donnent les suivans :

Si, par un point pris arbitrairement sur un arc cyclique d'une conique sphérique, on mène deux arcs tangens à la courbe, la somme des valeurs inverses des tangentes trigonométriques des angles qu'ils feront avec l'arc cyclique sera constante.

Si, par un foyer d'une conique sphérique, on mène arbitrairement un arc qui la rencontrera en deux points, la somme des valeurs inverses des tangentes trigonométriques des arcs compris entre le foyer et ces deux points, sera constante.

§ IV.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RELATIFS AUX ARCS CYCLIQUES ET AUX FOYERS DES CONIQUES SPHÉRIQUES.

[33] Les théorèmes (46 *a*) donnent les suivans :

Si, autour de deux point fixes pris sur une sphère, on fait tourner les côtés

Étant donnés deux arcs fixes et un point sur une sphère, si, autour de ce

d'un angle sphérique de grandeur variable, et tel que le segment intercepté entre ses côtés sur un arc de grand cercle donné soit d'une longueur constante, le sommet de cet angle engendrera une conique sphérique dont l'arc fixe sera un arc cyclique, et qui passera par les deux points fixes.

point, comme sommet, on fait tourner un angle sphérique de grandeur constante, et qu'on joigne par un arc les deux points où ses côtés rencontreront respectivement les deux arcs fixes donnés, cet arc enveloppera une conique sphérique qui aura pour foyer le point fixe, et qui sera tangente aux deux arcs fixes.

[34] Les théorèmes (47 *a*) donnent ceux-ci :

Si on mène deux arcs tangens à une conique sphérique, de manière que le segment intercepté entre eux sur un arc cyclique de la conique soit d'une grandeur constante, le point d'intersection de ces deux arcs aura pour lieu géométrique une seconde conique sphérique;

L'arc qui joindra les deux points de contact de ces deux arcs avec la conique proposée, enveloppera une troisième conique;

L'arc cyclique en question sera un arc cyclique des deux nouvelles coniques, et cet arc aura même pôle par rapport aux trois coniques.

Si, autour d'un foyer d'une conique sphérique, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur constante, l'arc qui joindra les deux points où ses côtés rencontreront la courbe enveloppera une seconde conique;

Les arcs tangens à la conique proposée en ces deux points se couperont sur une troisième conique;

Le foyer en question sera aussi un foyer des deux nouvelles coniques, et l'arc directeur correspondant sera le même dans les trois coniques.

[35] Les théorèmes (48 *a*) donnent ceux-ci :

Si, autour d'un point fixe, pris sur une conique sphérique, on fait tourner un angle sphérique, de grandeur variable, dont les côtés interceptent

Si, autour d'un foyer d'une conique sphérique, comme sommet, on fait tourner un angle sphérique de grandeur constante, et que par les deux

sur un arc cyclique de la courbe un segment de grandeur constante, l'arc qui joindra les deux points où les côtés de cet angle rencontreront la conique, enveloppera une seconde conique, qui aura pour arc cyclique celui de la conique proposée, sur lequel sont comptés les segmens, et cet arc aura même pôle dans les deux courbes.

points où ses côtés rencontrent un arc fixe tangent à la conique, on mène deux autres arcs tangens à cette courbe, le point d'intersection de ces deux arcs engendrera une seconde conique, dont le foyer de la proposée sera aussi un foyer; et l'arc directeur correspondant sera le même dans les deux courbes.

[36] Les théorèmes (49 *a*) donnent ceux-ci :

Si, ayant une conique sphérique et un arc fixe mené arbitrairement, on mène deux arcs tangens à la conique, de manière que le segment intercepté entre eux sur l'arc donné soit de 100°, le point d'intersection de ces deux arcs engendrera une seconde conique qui aura pour arc cyclique l'arc donné;

Cet arc aura même pôle dans les deux coniques.

[37] *Si l'arc fixe est un des arcs-diamètres principaux de la conique, le théorème prend cet énoncé :*

Si un angle sphérique variable, circonscrit à une conique sphérique, se meut de manière que le segment intercepté entre ses côtés sur un arc-diamètre principal de la conique soit toujours de 100°, le sommet de cet angle engendrera un petit cercle.

Si, ayant une conique sphérique et un point fixe pris arbitrairement sur la sphère, on fait tourner autour de ce point, comme sommet, un angle sphérique droit, et qu'on joigne deux à deux par quatre arcs les points où ses côtés rencontreront la conique, ces quatre arcs envelopperont une seconde conique dont le point fixe sera un foyer;

Ce point aura même arc polaire dans les deux courbes.

Si le point fixe est le centre de la conique, le théorème prend cet énoncé:

Si un angle sphérique droit tourne autour du centre d'une conique sphérique, comme sommet, l'arc qui joindra les points où ses deux côtés rencontreront la courbe enveloppera un petit cercle.

Cela résulte aussi des deux théorèmes (50 *a*).

[38] Les deux théorèmes (51 *a*) donnent les suivans :

Si, autour de deux points fixes d'une conique sphérique, on fait tourner deux arcs qui se coupent en un troisième point quelconque de la courbe, ces arcs rencontreront respectivement les deux arcs cycliques de la conique en deux points, et l'arc qui joindra ces deux points enveloppera une conique sphérique tangente à ces deux arcs cycliques.

Étant menés deux arcs fixes tangens à une conique sphérique, un troisième arc tangent quelconque les rencontrera en deux points, et les arcs menés par ces deux points et par les deux foyers de la conique respectivement, se couperont en un point dont le lieu géométrique sera une conique sphérique qui passera par les deux foyers de la proposée.

[39] Les théorèmes (52 *a*) donnent ceux-ci :

Si, autour de deux points fixes, on fait tourner deux arcs faisant entre eux un angle droit, leur point d'intersection engendrera une conique sphérique qui passera par les deux points fixes, et dont les arcs cycliques seront, dans les deux plans perpendiculaires aux rayons de la sphère, menés aux deux points fixes.

Si, entre les côtés d'un angle sphérique quelconque, on fait mouvoir un arc de 100°, dont les extrémités glissent sur les côtés de cet angle, cet arc mobile enveloppera une conique sphérique tangente aux deux côtés de l'angle, et dont les foyers seront les extrémités des rayons de la sphère perpendiculaires aux plans de ces côtés.

[40] Les théorèmes (53 *a*) donnent ceux-ci :

Étant donnés sur la sphère deux arcs fixes, si on cherche un point tel que le produit des sinus de ses distances aux deux arcs fixes soit constant, ce point aura pour lieu géométrique une conique sphérique dont les deux arcs cycliques seront les deux arcs fixes.

Étant donnés deux points fixes sur la sphère, si l'on mène un arc tel que le produit des sinus de ses distances à ces deux points soit constant, cet arc enveloppera une conique sphérique qui aura pour foyers les deux points fixes.

[41] Les théorèmes (54 *a*) donnent ceux-ci :

Étant donnés sur la sphère un arc et un point, si l'on cherche un arc tel que le sinus de l'angle qu'il fera avec l'arc donné, et le sinus de sa distance au point donné, soient entre eux dans un rapport constant, cet arc enveloppera une conique dont l'arc fixe sera un arc cyclique ; et le point fixe sera, par rapport à cette conique, le pôle de cet arc cyclique.

Étant donnés sur la sphère un point et un arc, si l'on cherche un point tel que les sinus de ses distances au point et à l'arc donnés soient entre eux dans un rapport constant, ce point aura pour lieu géométrique une conique dont le point fixe sera un foyer ; et l'arc fixe sera l'arc directeur correspondant à ce foyer.

[42] Si dans le second théorème le rapport des sinus est l'unité, on en conclut que :

La courbe sphérique dont chaque point est équidistant d'un point et d'un arc de grand cercle est une conique qui a pour foyer, et pour arc directeur correspondant, ce point et cet arc.

§ V.

PROBLÈMES RELATIFS AUX ARCS CYCLIQUES ET AUX FOYERS DES CONIQUES SPHÉRIQUES ; ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRIANGLES ET DES QUADRILATÈRES SPHÉRIQUES.

[43] Quand on donne un arc cyclique d'une conique sphérique, il ne faut plus que trois conditions pour déterminer cette courbe.

Quand on donne un foyer d'une conique sphérique, il ne faut plus que trois conditions pour déterminer cette courbe.

Cela résulte de ce que nous avons dit sur les cônes du second degré (56 *a*).

[44] Les théorèmes (57 *a*) donnent ceux-ci :

Étant donnés un arc cyclique et deux points d'une conique sphérique,

Le pôle de cet arc cyclique se trouve sur l'arc qui passe par les deux points suivans :

1° Le point qui est, par rapport aux deux points donnés, le conjugué harmonique de celui où l'arc qui joint ces deux points rencontre l'arc cyclique donné;

2° Le point de l'arc cyclique qui est distant de 100° de celui où cet arc rencontre l'arc qui joint les deux points donnés.

Étant donnés un foyer et deux arcs tangens d'une conique sphérique,

L'arc-directeur correspondant à ce foyer passe par le point d'intersection des deux arcs suivans :

1° L'arc mené par le point d'intersection des deux arcs tangens donnés, et qui est conjugué harmonique, par rapport à ces deux arcs, de l'arc mené par ce point d'intersection et par le foyer donné;

2° L'arc mené par ce foyer perpendiculairement à ce dernier arc qui joint ce foyer au point d'intersection des deux arcs tangens.

[45] Les théorèmes (58 *a*) donnent les suivans :

Étant donnés un arc cyclique et deux arcs tangens d'une conique sphérique,

Le pôle de cet arc cyclique se trouve sur l'arc mené par le point d'intersection des deux arcs tangens et par le milieu de l'arc (ou de son supplément), compris sur cet arc cyclique entre les deux arcs tangens donnés.

Étant donnés un foyer et deux points d'une conique sphérique,

L'arc directeur correspondant à ce foyer passe par le point d'intersection de l'arc qui joint les deux points donnés par l'arc vecteur qui divise en deux également l'angle (ou son supplément), compris entre les deux arcs vecteurs menés du foyer donné aux deux points de la conique.

[46] Les deux théorèmes (44) contiennent respectivement les solutions des deux problèmes suivans :

Problème. — Étant donnés trois points et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le pôle de cet arc cyclique.

Problème. — Étant donnés trois arcs tangens et un foyer d'une conique sphérique, déterminer l'arc directeur de la conique correspondant à ce foyer.

[47] Les deux théorèmes (45) servent pareillement à résoudre les deux problèmes suivans, qui admettent chacun quatre solutions :

Problème.—Étant donnés trois arcs tangens et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le pôle de cet arc cyclique.

Problème. — Étant donnés trois ~~arcs tangens~~ et un foyer d'une conique sphérique, déterminer l'arc-directeur de la conique correspondant à ce foyer.

[48] Nous venons de voir (46) que :

Étant donnés un triangle sphérique et un arc de grand cercle quelconque, cet arc peut être considéré comme un arc cyclique d'une conique sphérique menée par les trois sommets du triangle.

Étant donnés un triangle sphérique et un point fixe sur la sphère, ce point peut être considéré comme le foyer d'une conique sphérique tangente aux trois côtés du triangle,

Cette remarque va nous servir pour démontrer quelques propriétés générales des triangles et des quadrilatères sphériques.

[49] Les théorèmes (13) conduisent, d'après ce que nous

venons de dire, aux deux propriétés suivantes des triangles sphériques :

Si l'on a un triangle sphérique et un arc transversal, et qu'on prenne sur chaque côté du triangle un point dont la distance à une extrémité de ce côté soit égale à la distance de l'autre extrémité au point où l'arc transversal rencontre ce côté, les trois points ainsi déterminés sur les trois côtés du triangle seront sur un même arc de grand cercle;

Cet arc et l'arc transversal donnés seront les arcs cycliques d'une conique circonscrite au triangle sphérique.

(50) *Ce théorème donne la solution de ce problème :*

Problème. — Étant donnés trois points et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le second arc cyclique de cette courbe.

Si, ayant un triangle sphérique, on mène par un point fixe un arc à chaque sommet du triangle, et que, par ce sommet, on mène un second arc qui fasse, avec l'un des côtés du triangle adjacens à ce sommet, un angle égal à celui que le premier arc fait avec le second côté, les trois arcs ainsi menés passeront par un même point;

Ce point et le point donné seront les foyers d'une conique sphérique inscrite dans le triangle donné.

Ce théorème donne la solution de ce problème :

Problème. — Étant donnés trois arcs tangens et un foyer d'une conique sphérique, déterminer le second foyer de cette courbe.

[51] Les théorèmes (18) donnent ces deux propriétés des triangles sphériques :

Étant donnés un triangle sphérique et un arc transversal, si l'on prend sur cet arc trois points distans de 100° des trois sommets du triangle respectivement, et qu'on joigne ces points aux trois sommets par trois arcs, qu'on décrive une conique tangente à ces trois arcs, qui ait pour foyer l'extré-

Si d'un point pris arbitrairement sur la sphère, on abaisse trois arcs perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle sphérique, et que, par les points de rencontre de ces arcs et de ces côtés respectivement, on fasse passer une conique sphérique, qui ait pour arc cyclique le grand cercle situé dans

mité du rayon de la sphère perpendiculaire au plan de l'arc transversal, que, par les sommets du triangle donné, on mène trois nouveaux arcs tangens à cette conique, et qu'on prenne sur ces arcs trois points distans de 100° des trois sommets respectivement, ces trois points seront sur un même arc de grand cercle;

Cet arc sera dans le plan perpendiculaire au rayon de la sphère mené au second foyer de la conique.

le plan perpendiculaire au rayon de la sphère mené au point donné, cette conique rencontrera les trois côtés du triangle en trois nouveaux points tels que les arcs menés par ces points perpendiculairement aux trois côtés respectivement passeront par un même point;

Ce point sera l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan du second arc cyclique de la conique.

[52] Les théorèmes (19) donnent les deux propriétés suivantes des triangles sphériques :

Un triangle et un arc de grand cercle étant tracés sur une sphère, si, par chaque sommet du triangle, on mène un arc de 100° terminé à l'arc donné, les trois arcs ainsi menés formeront un second triangle sphérique; si, par les sommets, de ce nouveau triangle, on mène trois arcs de 100° terminés respectivement aux trois côtés opposés du premier triangle, les extrémités de ces trois arcs appartiendront à un même arc de grand cercle.

Si, d'un point pris sur une sphère, on abaisse des arcs perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle sphérique, leurs pieds seront les trois sommets d'un nouveau triangle inscrit au premier; si, des sommets de celui-ci, on abaisse des arcs perpendiculaires sur les côtés respectivement opposés du second triangle, ces trois arcs passeront par un même point.

[53] Les deux théorèmes (67 *a*) donnent les suivans :

Si on circonscrit à une conique sphérique plusieurs triangles sphériques, et qu'on conçoive autant de coniques sphériques circonscrites à ces trian-

Si l'on inscrit dans une conique sphérique plusieurs triangles sphériques, et qu'on conçoive autant de coniques sphériques inscrites dans ces

gles, et ayant toutes pour arc cyclique commun un arc tangent à la conique proposée, toutes ces courbes passeront par un même point.

triangles, et ayant pour foyer commun un point de la conique proposée, toutes ces coniques seront tangentes à un même arc de grand cercle.

[54] Des deux théorèmes (68 *a*) on conclut les suivans :

Étant donnée une conique sphérique, si on lui circonscrit un triangle sphérique quelconque, et qu'on prenne sur un arc fixe tangent à la conique trois points tels que les arcs menés de ces points aux trois sommets du triangle respectivement soient de 100°; puis; qu'on conçoive une conique tangente à ces trois arcs et qui ait pour foyer l'extrémité du rayon de la sphère perpendiculaire à l'arc fixe, cette nouvelle conique sera tangente à un même arc de grand cercle, quel que soit le triangle circonscrit à la conique proposée.

Si, par un point fixe pris sur une conique sphérique, on abaisse trois arcs perpendiculaires sur les côtés d'un triangle sphérique inscrit dans la conique, et que par leurs pieds on fasse passer une conique sphérique qui ait pour arc cyclique l'arc de grand cercle contenu dans le plan perpendiculaire au rayon de la sphère qui aboutit au point pris sur la conique proposée, cette nouvelle conique passera par un point fixe, quel que soit le triangle inscrit dans la proposée.

[55] Les deux théorèmes (69 *a*) donnent les deux propriétés générales suivantes des quadrilatères sphériques :

Étant donné un quadrilatère sphérique, ses côtés, pris trois à trois, formeront quatre triangles; si, par les sommets de chacun de ces triangles, on mène trois arcs de 100° terminés à un même arc de grand cercle donné, puis qu'on décrive une conique tangente à ces trois arcs, et qui ait pour foyer l'extrémité du rayon de

Étant donné un quadrilatère sphérique, ses quatre sommets, pris trois à trois, détermineront quatre triangles; si, d'un point fixe on abaisse des arcs perpendiculaires sur les trois côtés de chacun de ces triangles, et que, par les trois points d'intersection de ces arcs avec ces côtés respectivement, on fasse passer une conique sphérique

la sphère perpendiculaire au plan du grand cercle donné, les quatre coniques ainsi déterminées seront tangentes à un même arc de grand cercle.

qui ait un de ses arcs cycliques dans le plan perpendiculaire au rayon de la sphère qui aboutit au point fixe donné, les quatre coniques, ainsi déterminées, passeront par un même point.

§ VI.

DESCRIPTION ORGANIQUE DES CONIQUES SPHÉRIQUES.

[56] Les deux théorèmes (71 *a*) sur la description des cônes du second degré donnent ces deux-ci :

Si deux angles sphériques, de grandeur quelconque et constante, pivotent autour de deux points fixes, comme sommets, de manière que deux de leurs côtés se coupent sur un arc fixe donné, le point d'intersection de leurs deux autres côtés engendrera une conique sphérique qui passera par les deux sommets fixes des angles mobiles.

Si, sur deux arcs fixes donnés, on fait mouvoir deux segmens de grandeur quelconque, mais constante, de manière que l'arc qui joindra deux de leurs extrémités tourne autour d'un point fixe, l'arc qui joindra leurs deux autres extrémités enveloppera une conique qui sera tangente aux deux arcs fixes sur lesquels se meuvent les deux segmens.

Le premier de ces deux théorèmes est tout-à-fait semblable à celui de Newton sur la description organique des coniques planes.

(57) *Problème.*— Étant donnés cinq points d'une conique sphérique, déterminer tous les autres points de la courbe

***Problème.* — Étant donnés cinq arcs tangens d'une conique sphérique, déterminer tous les autres arcs tangens de la**

par le mouvement de deux angles sphériques autour de leurs sommets.

Soient A, B, C, D, E, les cinq points donnés; on prendra les deux premiers A, B pour sommets des deux angles mobiles, et ces deux angles seront (CAB), (CBA).

Qu'on fasse tourner ces angles autour de leurs sommets A, B, de manière que leurs côtés CA, CB, passent ensemble par le point D, puis par le point E; leurs deux autres côtés, qui d'abord se confondaient suivant l'arc AB, se couperont successivement en deux points D', E'.

Que le point d'intersection des deux mêmes côtés parcoure l'arc de grand cercle déterminé par les deux points D', E', le point d'intersection des deux autres côtés engendrera la conique sphérique demandée; ce qui résulte du théorème ci-dessus.

courbe, par le mouvement de 2 arcs sur 2 circonférences de grands cercles.

Soient A, B, C, D, E, les cinq arcs donnés; on prendra les circonférences de grands cercles auxquelles appartiennent les deux premiers A, B, pour celles sur lesquelles doivent se mouvoir les deux arcs mobiles; le troisième arc C, prolongé s'il le faut, rencontrera les deux premiers A, B, en deux points, et les arcs compris entre le point d'intersection de A et B et ces deux points seront les deux arcs mobiles.

Qu'on fasse marcher ces deux arcs sur leurs circonférences, de manière que leurs extrémités situées sur l'arc C viennent se placer sur l'arc D, puis sur l'arc E; leurs deux autres extrémités qui se confondaient d'abord dans le point d'intersection des deux arcs A, B, détermineront successivement deux arcs D', E'.

Que l'arc qui joint les deux mêmes extrémités tourne autour du point d'intersection de ces deux arcs D', E'; l'arc qui joindra les deux autres extrémités des deux arcs mobiles enveloppera la conique demandée; ce qui résulte du théorème ci-dessus.

§ VII.

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES PLANES DÉDUITES, COMME CONSÉQUENCES, DE CELLES DES CONIQUES SPHÉRIQUES.

[58] Nous avons dit (8) qu'on pouvait conclure des pro-

positions relatives aux coniques sphériques, contenues dans ce Mémoire, un très-grand nombre des propriétés des foyers des coniques planes, et des propriétés des asymptotes de l'hyperbole.

Il suffit en effet de supposer que le centre de la sphère s'éloigne à l'infini sur le rayon qui passe par le centre de la conique sphérique. Cette courbe dégénérera en conique plane, qui sera une ellipse ou une hyperbole; et les propriétés des foyers des coniques sphériques deviendront celles des coniques planes.

Dans le cas où la conique devient une hyperbole, les arcs cycliques deviendront deux droites fixes menées par le centre de la courbe; et les propriétés des arcs cycliques s'appliqueront à ces deux droites, qu'on reconnaît, à chacune de ces propriétés, pour les asymptotes de l'hyperbole.

[59] Nous allons énoncer les divers théorèmes qu'on déduit de cette manière, des propriétés des coniques sphériques; nous indiquerons à la suite de chacun d'eux, le numéro de celui dont il est la conséquence. Nous donnerons d'abord ceux qui sont relatifs aux foyers, et ensuite ceux qui sont relatifs aux asymptotes.

Ces deux classes de théorèmes, qui se trouvent ainsi avoir une origine commune, offrent un rapprochement singulier entre les propriétés des foyers et celles des asymptotes; propriétés si différentes en elles-mêmes et par les démonstrations qu'on a coutume d'en donner. Nous établirons en traitant des propriétés nouvelles des coniques dont nous avons

parlé (8), les relations intimes qui ont lieu sous d'autres rapports entre les foyers des coniques et les asymptotes de l'hyperbole.

I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DEUX FOYERS DES CONIQUES PLANES, CONSIDÉRÉS SIMULTANÉMENT.

1° Les rayons vecteurs menés des deux foyers à un point d'une conique sont également inclinés sur la tangente en ce point (11).

2° Réciproquement : Si une courbe est telle que les rayons vecteurs menés de deux points fixes à chacun de ses points soient également inclinés sur la tangente en ce point, la courbe est une conique (12).

3° Les deux rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique au point de rencontre de deux tangentes, font avec ces tangentes respectivement des angles égaux (13).

4° Les quatre rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique à deux quelconques de ses points sont tangens à un même cercle, dont le centre est le point d'intersection des tangentes à la conique en ces deux points (14).

5° La somme ou la différence des deux rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique à chacun de ses points est constante (15).

6° Le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles que les deux rayons vecteurs menés des deux foyers

nt avec son

s des deux
courbe est

deux foyers
rcle (18).
s perpendi-
joigne leurs
lroite menée
ıssera par le

se coupent,
ints d'inter-

SEUL FOYER.

d'une coni-
ıte est con-

une conique
ıgente en ce
e droit (23).
ıne conique
:linés sur le

parlé (8), les relations intimes qui ont lieu sous d'autres rapports entre les foyers des coniques et les asymptotes de l'hyperbole.

I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DEUX FOYERS DES CONIQUES PLANES, CONSIDÉRÉS SIMULTANÉMENT.

1° Les rayons vecteurs menés des deux foyers à un point d'une conique sont également inclinés sur la tangente en ce point (11).

2° Réciproquement : Si une courbe est telle que les rayons vecteurs menés de deux points fixes à chacun de ses points soient également inclinés sur la tangente en ce point, la courbe est une conique (12).

3° Les deux rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique au point de rencontre de deux tangentes, font avec ces tangentes respectivement des angles égaux (13).

4° Les quatre rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique à deux quelconques de ses points sont tangens à un même cercle, dont le centre est le point d'intersection des tangentes à la conique en ces deux points (14).

5° La somme ou la différence des deux rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique à chacun de ses points est constante (15).

6° Le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles que les deux rayons vecteurs menés des deux foyers

d'une conique à un quelconque de ses points font avec son grand axe est constant (16).

7° Le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers d'une conique sur chaque tangente à la courbe est constant (17).

8° Les pieds des perpendiculaires abaissées des deux foyers d'une conique sur ses tangentes, sont sur un cercle (18).

9° Si d'un foyer d'une conique on abaisse des perpendiculaires sur deux tangentes à la courbe, et qu'on joigne leurs pieds par une droite, la perpendiculaire à cette droite menée par le point de concours des deux tangentes, passera par le second foyer de la courbe (19).

10° Si deux coniques qui ont mêmes foyers se coupent, elles sont à angles droits en chacun de leurs points d'intersection (20).

II.

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES PLANES RELATIVES A UN SEUL FOYER.

1° Le rapport des distances de chaque point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est constant (22).

2° Les rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique à un point de la courbe, et au point où la tangente en ce premier point rencontre la directrice, sont à angle droit (23).

3° Les rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique à deux points de la courbe, sont également inclinés sur le

rayon vecteur mené au point de rencontre des deux tangentes en ces points (24).

4° Les deux rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique à deux points de la courbe sont également inclinés sur le rayon vecteur mené au point où la corde qui joint les deux points de la courbe rencontre la directrice (25).

5° Le rayon vecteur mené d'un foyer d'une conique au point de rencontre de deux tangentes à la courbe, et le rayon vecteur mené au point où la corde qui joint les deux points de contact rencontre la directrice sont à angle droit.

Les deux droites menées par le point de concours des deux tangentes, et passant, la première par le foyer, et la seconde par le point où la corde qui joint les deux points de contact rencontre la directrice, sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes (26).

6° Si, par le foyer d'une conique, on tire une transversale, son pôle, par rapport à la courbe, sera sur la directrice, et le rayon vecteur mené du foyer à ce pôle sera perpendiculaire sur la transversale (27).

7° Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, deux côtés opposés du quadrilatère sont vus d'un foyer sous deux angles supplément l'un de l'autre (28).

8° Étant menées deux tangentes fixes à une conique, la partie d'une autre tangente mobile comprise entre ces deux premières sera vue d'un foyer sous un angle de grandeur constante.

Cet angle sera droit, si les deux tangentes fixes ont leur point de concours sur la directrice (29).

9° La partie d'une tangente quelconque d'une conique comprise entre les deux tangentes menées par les extrémités du grand axe est vue d'un foyer sous un angle droit (30).

10° Étant données une conique et une de ses tangentes fixe, si autour d'un foyer, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur constante, et que par le point où un de ses côtés rencontre la tangente fixe, on mène une seconde tangente à la courbe, cette seconde tangente rencontrera le second côté de l'angle en un point dont le lieu géométrique sera une tangente à la conique (31).

11° Toute corde d'une conique menée par un foyer est divisée en ce point en deux parties dont la somme des valeurs inverses est constante (32).

III.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RELATIFS AUX FOYERS DES CONIQUES PLANES.

1° Si autour d'un point fixe, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur constante, et qu'on joigne par une droite les deux points où ses côtés rencontreront respectivement deux droites fixes données, cette droite enveloppera une conique ayant pour foyer le sommet de l'angle mobile, et qui sera tangente aux deux droites fixes (33).

2° Si, autour d'un foyer d'une conique, comme sommet, on

fait tourner un angle de grandeur constante, la corde qu'il soustendra dans la conique enveloppera une seconde conique;

Les tangentes à la conique proposée aux extrémités de cette corde se couperont en un point dont le lieu géométrique sera une troisième conique;

Ces deux nouvelles coniques auront même foyer, et même directrice correspondante que la conique proposée (34).

3° Si, autour du foyer d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur donnée, et que par les points où ses côtés rencontrent une tangente à la conique, on mène deux nouvelles tangentes, leur point d'intersection engendrera une seconde conique qui aura pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile, et pour directrice correspondante celle de la conique proposée (35).

4° Si, dans le plan d'une conique, on fait tourner un angle droit autour d'un point fixe, comme sommet, les cordes soustendues dans la conique par les côtés de cet angle envelopperont une seconde conique ayant un de ses foyers au point fixe, et pour directrice correspondante la polaire de ce point par rapport à la conique proposée (36).

Si le sommet de l'angle mobile est le centre de la conique proposée, la seconde conique sera un cercle (37).

5° Étant données une conique et deux tangentes fixes, si on mène une troisième tangente quelconque, et que par les points où elle rencontre les deux tangentes fixes, on mène deux droites passant respectivement par les deux foyers

de la courbe, ces deux droites se couperont en un point dont le lieu géométrique sera une conique passant par les deux foyers de la proposée (38).

6° Étant donnés deux points fixes, si on mène une droite telle que le produit de ses distances aux deux points fixes soit constant, cette droite, et toutes celles déterminées semblablement, envelopperont une conique qui aura pour foyers les deux points fixes (40).

7° Étant donnés un point et une droite, le lieu géométrique d'un point dont les distances au point donné et à la droite sont entre elles dans un rapport constant, est une conique qui a pour foyer le point donné, et pour directrice correspondante la droite (41).

IV.

PROBLÈMES RELATIFS AUX FOYERS DES CONIQUES PLANES, ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRIANGLES ET DES QUADRILATÈRES.

1° Quand on donne un foyer d'une conique, il ne faut plus que trois conditions pour déterminer cette courbe (43).

2° Étant donnés un foyer et deux tangentes d'une conique, la directrice correspondante à ce foyer passe par le point d'intersection des deux droites suivantes :

a. La droite menée par le point d'intersection des deux tangentes données, et qui est conjuguée harmonique, par rapport à ces deux tangentes, de la droite menée par ce point d'intersection et par le foyer de la courbe;

b. La droite menée par le foyer perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point de concours des deux tangentes données (44).

3° Étant donnés un foyer et deux points d'une conique, la directrice correspondante à ce foyer passe par le point d'intersection de la droite qui joint les deux points donnés par la droite qui divise en deux également l'angle, ou son supplément, compris entre les deux rayons vecteurs menés du foyer aux deux points donnés (45).

4° Le théorème (2°) comprend la solution de ce problème :

Étant donnés trois tangentes et un foyer d'une conique, déterminer la directrice correspondante à ce foyer.

5° Le théorème (3°) sert à résoudre le problème suivant, qui admet quatre solutions :

Étant donnés trois points et un foyer d'une conique, déterminer la directrice correspondante à ce foyer.

6° Si, ayant mené d'un point fixe trois droites aux trois sommets d'un triangle, on conduit par chaque sommet une nouvelle droite faisant avec l'un des deux côtés adjacents à ce sommet un angle égal à celui que la première droite fait avec l'autre côté, les trois droites ainsi menées passeront par un même point.

Ce point et celui d'où l'on a mené les trois premières droites seront les foyers d'une conique inscrite dans le triangle donné (49).

7° Ce théorème offre une solution de ce problème :

Étant donnés trois tangentes et un foyer d'une conique, déterminer son second foyer.

8° Si d'un point pris arbitrairement dans le plan d'un triangle, on abaisse trois perpendiculaires sur ses côtés, et que par leurs pieds on fasse passer un cercle, les perpendiculaires élevées sur ces côtés par les trois nouveaux points où ce cercle les rencontrera, passeront par un même point (51).

9° Si d'un point pris dans le plan d'un triangle, on abaisse sur ses côtés trois perpendiculaires, leurs pieds seront les sommets d'un second triangle inscrit dans le premier; si par les sommets de celui-ci, on mène des droites perpendiculaires aux côtés respectivement opposés du second, ces trois droites passeront par un même point (52).

Les pieds des perpendiculaires abaissées de ce nouveau point sur les côtés du triangle proposé, et ceux des trois premières perpendiculaires seront six points situés sur une même circonférence de cercle.

10° Si l'on inscrit dans une conique plusieurs triangles, et qu'on conçoive autant de coniques inscrites dans ces triangles, et ayant toutes pour foyer commun un point pris sur la conique proposée, toutes ces coniques seront tangentes à une même droite (53).

11° Si d'un point pris sur une conique, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle inscrit dans la conique, le cercle mené par les pieds de ces perpendiculaires passera par un point fixe, quel que soit le triangle inscrit dans la conique (54).

12° Les quatre sommets d'un quadrilatère, pris trois à trois, déterminent quatre triangles; si d'un point quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés de chaque triangle, et que par leurs pieds on fasse passer un cercle, les quatre cercles ainsi déterminés passeront par un même point (55).

V.

PROPRIÉTÉS DES DEUX ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE CONSIDÉRÉES SIMULTANÉMENT.

1° Toute tangente à l'hyperbole rencontre les asymptotes en deux points qui sont également éloignés du point de contact (11).

2° Réciproquement : Si une courbe est telle que chacune de ses tangentes ait sa partie comprise entre deux droites fixes, divisée en son milieu par son point de contact, cette courbe est une hyperbole dont les deux droites fixes sont les asymptotes (12).

3° Les segmens d'une sécante quelconque, compris entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égaux (13).

4° Toute tangente à l'hyperbole rencontre les asymptotes en deux points dont le produit des distances au centre de la courbe est une quantité constante (16).

5° Dans tout hyperbole le produit des distance de chaque point de la courbe à ses deux asymptotes est constant (17).

VI.

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE, RELATIVES A UNE SEULE ASYMPTOTE.

1° Deux tangentes à l'hyperbole et la droite qui joint leurs points de contact rencontrent une asymptote en trois points dont le troisième est à égale distance des deux premiers (24).

2° Si, autour de deux points fixes d'une hyperbole, on fait tourner les deux côtés d'un angle variable, dont le sommet parcourt la courbe, le segment compris entre cet angle sur une asymptote sera de grandeur constante (29).

3° Si, sur une asymptote d'une hyperbole, on prend arbitrairement un segment de grandeur donnée, et que par une de ses extrémités et un point fixe de la courbe, on mène une droite qui rencontrera la courbe en un second point, la droite qui joindra ce second point à la seconde extrémité du segment tournera autour d'un point fixe de l'hyperbole (31).

VII.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RELATIFS AUX ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE.

1° Si autour de deux points fixes on fait tourner les deux côtés d'un angle de grandeur variable, de manière qu'ils interceptent sur une droite fixe un segment de grandeur constante, le sommet de cet angle engendrera une hyper-

bole qui passera par les deux points fixes, et qui aura pour asymptote la droite fixe (33).

2° Si l'on circonscrit à une hyperbole un angle de grandeur variable dont les côtés interceptent sur une asymptote un segment de grandeur constante, le sommet de cet angle aura pour lieu géométrique une seconde hyperbole;

La corde qui joindra les deux points de contact des côtés de l'angle enveloppera une troisième hyperbole;

Ces deux nouvelles hyperboles auront pour asymptote celle sur laquelle sont pris les segmens interceptés entre les côtés de l'angle mobile (34).

3° Si, autour d'un point d'une hyperbole, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur variable, qui intercepte sur une asymptote un segment de grandeur constante, la corde soustendue par cet angle enveloppera une seconde hyperbole, ayant pour asymptote celle sur laquelle sont pris les segmens interceptés dans l'angle mobile (35).

4° Si, autour de deux points fixes d'une hyperbole, on fait tourner les côtés d'un angle variable, dont le sommet parcourt la courbe, les côtés de cet angle rencontreront respectivement les deux asymptotes en deux points, et la droite qui joindra ces deux points enveloppera une conique tangente aux deux asymptotes de l'hyperbole (38).

5° Étant données deux droites, le point dont le produit des distances aux deux droites est constant, a pour lieu géométrique une hyperbole dont les deux droites sont les asymptotes (40).

VIII.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RELATIFS A UNE CONIQUE QUELCONQUE.

Les trois premiers des cinq théorèmes précédens donnent lieu à des théorèmes nouveaux, au moyen de la méthode de transformation des relations métriques, que nous avons exposée dans un précédent Mémoire ; ces théorèmes, qui appartiennent à une conique quelconque, sont ceux-ci :

« 1° Si, autour d'un point fixe, comme sommet, on fait » tourner un angle de grandeur variable, et tel que le seg- » ment qu'il intercepte sur un axe fixe soit de grandeur » constante, la droite qui joindra les deux points où les » côtés de cet angle rencontreront respectivement deux droi- » tes données enveloppera une conique qui sera tangente » à ces deux droites, et qui passera par le sommet de l'angle » mobile ;

» La tangente à la courbe en ce point sera parallèle à » l'axe sur lequel sont comptés les segmens. »

Cette proposition offre la solution de ce problème :

« Étant donnés quatre tangentes d'une conique et le point » de contact d'une de ces tangentes, déterminer, par le » mouvement continu d'un segment de grandeur constante » sur une droite fixe, toutes les tangentes de la courbe. »

« 2° Si, autour d'un point d'une conique, comme som- » met, on fait tourner un angle de grandeur variable, tel » que le segment qu'il intercepte sur un axe fixe parallèle » à la tangente en ce point soit de grandeur constante, la

» corde que cet angle soustendra dans la conique envelop-
» pera une seconde conique;

» Le point d'intersection des deux tangentes à la pre-
» mière conique aux extrémités de cette corde engendrera
» une troisième conique;

» Ces deux nouvelles courbes toucheront la proposée au
» sommet de l'angle mobile. »

« 3° Si, autour d'un point fixe d'une conique, comme
» sommet, on fait tourner un angle de grandeur variable
» dont les côtés interceptent sur une parallèle à la tangente
» à la courbe en ce point un segment de grandeur constan-
» te, et que, par les points où les côtés de cet angle rencon-
» treront une tangente fixe à la courbe, on mène deux nou-
» velles tangentes, leur point d'intersection engendrera une
» conique qui touchera la proposée au sommet de l'angle
» mobile. »

IX.

PROBLÈME RELATIF AUX ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE, ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRIANGLES.

1° Étant donnée une asymptote d'une hyperbole, il ne faut plus que trois conditions pour déterminer la courbe (43).

2° Si l'on tire une transversale quelconque dans le plan d'un triangle, et qu'on prenne sur chaque côté un point qui soit distant d'un des deux sommets situés sur ce côté d'une quantité égale à la distance du second sommet au

point où la transversale rencontre ce côté, les trois points ainsi pris seront en ligne droite (49).

3° Ce théorème donne la solution de ce problème :

Étant donnés trois points et une asymptote d'une hyperbole, trouver la seconde asymptote.

4° Si on circonscrit à une hyperbole plusieurs triangles, et qu'on conçoive autant d'hyperboles circonscrites à ces triangles et ayant toutes pour asymptote commune une tangente à l'hyperbole proposée, toutes ces courbes passeront par un même point (53).

5° Au moyen de la méthode de transformation des relations métriques dont nous avons déjà fait usage (n° 8 de ce paragraphe), le théorème ci-dessus (2°) donne lieu à cette autre propriété générale des triangles :

« Si, par chaque sommet d'un triangle, on mène deux » droites dont la première passe par un point fixe don- » né, et dont la seconde soit telle que les angles que » ces deux droites font respectivement avec les deux côtés » du triangle adjacens au sommet, comprennent sur une » transversale fixe des segmens égaux, les trois droites » ainsi déterminées passeront par un même point. »

X.

DESCRIPTION ORGANIQUE DES CONIQUES PLANES.

Les deux théorèmes (56) sur la description des coniques sphériques donnent les deux suivans :

1° Si deux angles de grandeur donnée tournent autour de deux points fixes, comme sommets, de manière que le point de concours de deux de leurs côtés parcoure une ligne droite, le point de concours de leurs deux autres côtés engendrera une conique qui passera par les deux points fixes.

2° Si, sur deux droites fixes, on fait mouvoir deux segmens de grandeur donnée, de manière que deux de leurs extrémités soient toujours en ligne droite avec un point fixe, la droite qui joindra leurs deux autres extrémités enveloppera une conique qui sera tangente aux deux droites fixes.

Le premier de ces deux théorèmes est celui de Newton, et sert à décrire les coniques par points; le second, qui est nouveau, offre une construction très-facile des tangentes des coniques; ce que nous allons voir en résolvant le problème suivant :

3° *Problème.* — Étant données cinq tangentes d'une conique, déterminer toutes ses autres tangentes par le mouvement de deux segmens rectilignes sur deux droites fixes.

Soient A, B, C, D, E, les cinq droites données; on prendra les deux premières A, B, pour les deux droites fixes sur lesquelles doivent se mouvoir les deux segmens, et on prendra pour ces segmens les distances du point de concours de ces deux droites à leurs points d'intersection par la troisième droite C.

On fera mouvoir ces deux segmens sur les deux droites A, B, respectivement, de manière que leurs extrémités situées sur la droite C viennent se placer sur la droite D, puis sur la droite E; leurs deux autres extrémités qui d'abord se confondaient dans le point d'intersection des deux droites A, B, détermineront successivement deux droites D' E'.

Que les deux segmens se meuvent de manière que ces deux mêmes extrémités soient toujours en ligne droite avec le point d'intersection des deux droites D', E'; la droite qui joindra les deux autres extrémités des deux segmens prendra toutes les positions des tangentes à la conique demandée : ce qui résulte du second théorème ci-dessus.

4° Nous n'avons pas besoin d'énoncer la construction par laquelle, en vertu du théorème de Newton, on détermine les points d'une conique assujettie à passer par cinq points donnés; nous ne ferions que répéter ce que nous avons dit pour la solution de la même question relativement aux coniques sphériques (57).

5° Faisons remarquer, en terminant ce Mémoire, que le théorème (2°), qui sert à construire les tangentes d'une conique, donne lieu, en vertu de notre mode de transformation des relations métriques, à un autre théorème propre à la construction des coniques par points, et qui pourrait, pour cet usage, remplacer le théorème de Newton.

Ce nouveau théorème peut être énoncé ainsi :

« Si deux angles, qui interceptent sur un axe fixe des » segmens de grandeur constante, pivotent autour de deux

» points fixes, comme sommets, de manière que deux de » leurs côtés se coupent toujours sur une droite donnée, » le point de concours de leurs deux autres côtés engendrera une conique qui passera par les deux points fixes. »

On peut faire de ce théorème le même usage que Maclaurin a fait de celui de Newton, dans sa *Géométrie organique.*

6° Nous devons ajouter, pour compléter ce chapitre sur la construction organique des coniques, que le théorème de Newton donne lieu aussi à un théorème sur la construction des tangentes des coniques par le mouvement de deux angles de grandeur constante. On obtient ce théorème par une transformation polaire, en prenant un cercle pour conique auxiliaire, ainsi que M. Poncelet l'a indiqué dans son *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques*; on peut l'énoncer ainsi :

« Si, autour d'un point fixe, comme sommet, on fait » tourner deux angles de grandeur constante, de manière » que les points où deux de leurs côtés rencontrent respectivement deux droites données soient toujours en ligne » droite avec un point donné, la droite qui joindra les points » où les deux autres côtés rencontreront respectivement les » deux mêmes droites enveloppera une conique qui sera » tangente à ces deux droites. »

FIN.

(Mémoire extrait du VI[e] volume des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles.*)


3 2044 020 158 911